Irrazionalità del numero di Nepero e

Lemma 1 Vale la seguente disuguaglianza

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1}, \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}_0 . \tag{1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(q+1)!}\Big(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+3)(q+2)} + \cdots\Big) \\
&< \frac{1}{(q+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q+2)^k} \\
&= \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 1 $e \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione Per il Teorema 5.3 si ha che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} . \tag{2}$$

Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Allora, si avrebbe

$$N := q!\Big(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\Big) = q!\Big(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\Big) = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z} ,$$

e, d'altra parte,

$$N \overset{(2)}{=} q! \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \overset{(1)}{<} \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1 ,$$

il che, essendo $N > 0$, è una contraddizione, non esistendo alcun numero intero in $(0, 1)$. $\blacksquare$